Concursul județean „Caleidoscop matematic"
24.11.2018
Clasa a V-a
Varianta 3

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Fie șirul 3; 9; 15; 21; 27; … . Suma primilor 50 de termeni din șir este egală cu:

   A. 7600 **B.** 7203 **C.** 7500 **D.** Alt răspuns **5p**

2. Dacă $a \neq b$, atunci numărul $\overline{aabba}_{(2)}$ transformat în baza 10 este egal cu:

   A. 101 **B.**24 **C.** 25 **D.** Alt răspuns **5p**

3. Numărul de numere naturale de 4 cifre care sunt egale cu răsturnatul lor este egal cu:

   A. 90 **B.** 100 **C.** 81 **D.** Alt răspuns **5p**

4. Dacă $5 \cdot a + 8 \cdot b + 3 \cdot c = 284$ și $b + c = 23$, atunci $2 \cdot a + 2 \cdot b$ este egal cu:

   A. 86 **B.** 43 **C.** 34 **D.** Alt răspuns **5p**

5. Succesorul numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2018 + 2^{2018}$ are ultima cifră:

   A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** Alt răspuns **5p**

6. Suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr natural care împărțite la 2006 dau câtul egal cu cubul numărului $a = 78 \cdot 87 - 87 \cdot 8 + 70 \cdot 13 - 6990$ este:

   A. $2006 \cdot 10^3 + 2005$ **B.** $2006 \cdot 10^3$ **C.** $4012 \cdot 10^3$ **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

1. Aflați numerele $\overline{abc}$, cu $a > c$ pentru care: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$. **15p**
2. Într-o urnă sunt bile roșii, negre și galbene, în total 80 bile. Dacă 61 dintre ele nu sunt bile galbene, iar 42 nu sunt bile negre, aflați numărul bilelor din fiecare culoare. **15p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie șirul de numere naturale: $a_1 = 5$; $a_2 = a_1 + 4 \cdot 5$; $a_3 = a_2 + 4 \cdot 5^2$; …; $a_{100} = a_{99} + 4 \cdot 5^{99}$

a). Aflați a_4. **10p**

b). Comparați a_{100} cu numărul 3^{150}. **10p**

c). Exprimați cât mai simplu produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}$. **10p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
24 noiembrie 2018
Barem de corectare
Clasa a V-a
Varianta 3

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
C	C	A	A	B	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

1. $(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) = 11 \cdot a + 11 \cdot b + 11 \cdot c$ **2p**
   $88 \cdot a = 11 \cdot b + 110 \cdot c$ **2p**
   $8 \cdot a = b + 10 \cdot c$ **3p**
   Numerele sunt 261; 342; 423; 684; 765; 846; 927 **8p**
2. r = număr bile roșii; n = număr bile negre; g = număr bile galbene
   $r + n + g = 80$ **2p**
   $r + n = 61 \Rightarrow g = 19$ **3p**
   $r + g = 42 \Rightarrow n = 38$ **5p**
   $r = 23$ **5p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a). $a_2 = 5^2$ **3p**
$a_3 = 5^3$ **3p**
$a_4 = 5^4$ **4p**

b). $a_{100} = 5^{100} = (5^2)^{50} = 25^{50}$ **4p**
$3^{150} = (3^3)^{50} = 27^{50}$ **4p**
$25^{50} < 27^{50} \Rightarrow a_{100} < 3^{150}$ **2p**

c). $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \ldots \cdot 5^{100} = 5^{1+2+3+\cdots+100} =$ **5p**
$= 5^{100 \cdot 101 : 2} = 5^{5050}$ **5p**

Oficiu 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
24.11.2018
Clasa a VI-a
Varianta 3

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Dacă $E = 15^{n+1} + 3^n \cdot 5^{n+1} - 3^{n+2} \cdot 5^n$, atunci E este divizibil cu:

   A. 2 **B.** 7 **C.** 11 **D.** 13 **5p**

2. Fie punctele A, O, B coliniare în această ordine, $C \notin AB$, astfel încât măsura $\sphericalangle AOC$ este egală cu 70^0. Dacă (OM este bisectoarea $\sphericalangle BOC$, atunci măsura $\sphericalangle MOB$ este egală cu:

   A. 105^0 **B.** 125^0 **C.** 55^0 **D.** Alt răspuns **5p**

3. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ puncte coliniare în această ordine, $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, $A_3A_4 = 3$ cm, …, $A_9A_{10} = 9$ cm. Dacă M este mijlocul (A_1A_{10}), atunci lungimea (A_2M) este:

   A. 21,5 cm **B.** 22,5 cm **C.** 22 cm **D.** Alt răspuns **5p**

4. După o mărire cu 20 lei un obiect costă 400 lei. Procentul cu care trebuie scăzut pentru a aduce obiectul la prețul inițial este:

   A. 5% **B.** 20% **C.** 10% **D.** Alt răspuns **5p**

5. Numărul de numere naturale $x = \overline{a1b} + \overline{1b5}$ care sunt divizibile cu 15 este egal cu:

   A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** Alt răspuns **5p**

6. Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf este:

   A. 0^0 **B.** 90^0 **C.** 108^0 **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

1. Fie numărul $x = 5 \cdot 5^{2018} \cdot 2^{2019} - 2018$.

   a). Este numărul x pătrat perfect? Justificați **10p**

   b). Aflați suma cifrelor numărului x. **10p**

   c). Aflați numărul divizorilor proprii ai numărului 2018^{2018} **10p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie unghiurile $\sphericalangle A_1OA_2 = 1^0$; $\sphericalangle A_2OA_3 = 2^1 grade$; $\sphericalangle A_3OA_4 = 2^2 grade$; … $\sphericalangle A_{n-1}OA_n = 2^{n-2} grade$; în jurul punctului O, unde n este număr natural.

a). Aflați măsura $\sphericalangle A_2OA_6$. **10p**

b). Dacă (OM și (OA_4 sunt semidrepte opuse, aflați măsura unghiului $\sphericalangle A_1OM$. **10p**

c). Care este numărul maxim de semidrepte care respectă datele problemei? **10p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic”
24 noiembrie 2018
Barem de corectare
Clasa a VI-a
Varianta 3

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
C	C	A	A	B	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

1. a). $x = 10^{2019} - 2018$ **2p**
   $U(10^{2019}) = 0$ **2p**
   $U(x) = 2 \Rightarrow$ x nu este pătrat perfect **6p**
   b). $x = \underbrace{99\ldots9}_{de\ 2015\ ori}7982$ **5p**
   suma cifrelor lui x este $9 \cdot 2015 + 7 + 9 + 8 + 2 = 18161$ **5p**
   c). $2018^{2018} = (2 \cdot 1009)^{2018} = 2^{2018} \cdot 1009^{2018}$ **3p**
   1009 este număr prim **2p**
   Nr. divizori = $2019 \cdot 2019 = 2019^2$ **3p**
   Nr divizori proprii = $2019^2 - 2$ **2p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a). figura corect desenată **3p**
$\sphericalangle A_2OA_6 = \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 + \sphericalangle A_4OA_5 + \sphericalangle A_5OA_6$ **3p**
$=(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)grade = 30\ grade$ **4p**

b). $\sphericalangle A_1OM = 180^0 - (\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4)$ **5p**
$= 180^0 - 7^0 = 173^0$ **5p**

c). $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + \sphericalangle A_nOA_1 = 360^0$ **3p**
$2^{n-1} - 1 + \sphericalangle A_nOA_1 = 360^0$ **3p**
$2^{n-1} + \sphericalangle A_nOA_1 = 361^0 \Rightarrow n - 1 \leq 8$ **3p**
Numărul maxim este 9 **1p**

Oficiu 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"

24.11.2018

Clasa a VII-a

Varianta 3

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Dacă $a = \left(5 + \frac{9}{2} + \frac{13}{3} + \dots + \frac{401}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right)$, atunci a este pătratul lui:

   A. 400 **B.** 21 **C.** 20 **D.** Alt răspuns **5p**

2. Un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare are baza mare egală cu 10 cm, baza mică egală cu 6 cm. Atunci aria trapezului este egală cu:

   A. 48 cm^2 **B.** 90 cm^2 **C.** 64 cm^2 **D.** Alt răspuns **5p**

3. Fie M și N mijloacele laturilor (AB), respectiv (BC) ale pătratului ABCD, iar $AN \cap MC = \{P\}$. Dacă aria suprafeței MPNB este egală cu 16 cm^2, atunci aria pătratului ABCD este egală cu:

   A. 96 cm^2 **B.** 24 cm^2 **C.** 48 cm^2 **D.** Alt răspuns **5p**

4. Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-33}$ este:

   A. -2^{561} **B.** -2^{531} **C.** -2 **D.** Alt răspuns **5p**

5. Dacă ABCD este romb cu diagonalele congruente, atunci măsura unghiului DAC este:

   A. 90^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** Alt răspuns **5p**

6. Dacă un magazin are o promoție de black Friday cu o reducere de 10%, iar dacă un telefon costă 1080 lei, atunci reducerea oferită este de:

   A. 100 lei **B.** 1200 lei **C.** 102 lei **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

1. Numerele naturale nenule a, b, c verifică relațiile: $\frac{a}{a+2} = \frac{b}{b+3} = \frac{c}{c+4}$ și $a \cdot b \cdot c = 3000$.

   Aflați $2 \cdot a + 3 \cdot b + 4 \cdot c$. **15p**

2. În paralelogramul ABCD, fie M mijlocul lui (AB), N mijlocul lui (CM), $DN \cap AB = \{Q\}$, $DN \cap BC = \{P\}$. Demonstrați că triunghiurile NCP și PBQ sunt echivalente. **15p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

În pătratul ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$, punctele M, N, P, S sunt mijloacele lui (OA), (CD), (BC), respectiv (OB). Demonstrați că N, H, S sunt coliniare, unde H este ortocentrul triunghiului MNP. **30p**

Concursul judeţean „Caleidoscop matematic"
24 noiembrie 2018
Barem de corectare
Clasa a VII-a, Varianta 3

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
C	C	A	A	B	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

1. $\frac{a+2}{a}=\frac{b+3}{b}=\frac{c+4}{c}$ **2p**

$1+\frac{2}{a}=1+\frac{3}{b}=1+\frac{4}{c}$ **1p**

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k\Rightarrow a=2k;\ b=3k;\ c=4k$ **2p**

$24\cdot k^3=3000\Rightarrow k=5$ **5p**

$a=10;\ b=15;\ c=20$ **3p**

$2\cdot a+3\cdot b+4\cdot c=145$ **2p**

2. $\Delta CDN\equiv\Delta MQN$ (ULU) **5p**

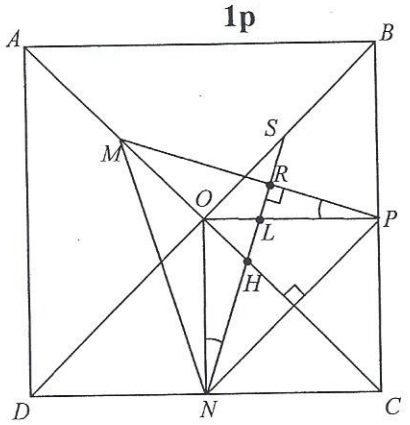
$DC=MQ\Rightarrow MB=BQ$ **3p**

$A_{MNB}=A_{NBQ};\ A_{MNB}=A_{BNC}\Rightarrow A_{NBQ}=A_{BNC}$ **3p**

$A_{NBP}+A_{PBQ}=A_{NBP}+A_{NPC}$ **3p**

$A_{PBQ}=A_{NPC}$ **1p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte



Fie $MP\cap NS=\{R\}$. Arătăm că $[NR]$ este înălţime în ΔMNP.
Comparăm ΔMOP cu ΔSON şi demonstrăm congruenţa lor.

Într-adevăr: $MO=SO, NO=PO, \hat{MOP}\equiv\hat{NOS}$ (L.U.L.) **10p**

Din congruenţă, rezultă: $\hat{MPO}\equiv\hat{ONS}$.

Dar: $m\left(\hat{ONS}\right)+m\left(\hat{OLN}\right)=90^0$ $NS\cap OP=\{L\}$. **5p**

Cum $m\left(\hat{ONS}\right)=m\left(\hat{MPO}\right)$ şi $m\left(\hat{OLN}\right)=m\left(\hat{RLP}\right)$, (opuse la vârf), ultima relaţie se scrie **5p**

astfel: $m\left(\hat{MPO}\right)+m\left(\hat{RLP}\right)=90^0\Rightarrow m\left(\hat{LRP}\right)=90^0\Rightarrow NR\perp MP$, adică $[NR]$- înălţime în **5p**

ΔMNP. Din ipoteză, H este ortocentrul triunghiului MNP şi cum $[NR]$- înălţime în ΔMNP, **3p**

vom avea că $H\in[NR]\Rightarrow$ punctele N,H,R - coliniare sau punctele N,H,S sunt coliniare. **2p**

Oficiu 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
24.11.2018
Clasa a VIII-a, Varianta 3

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Dacă x și y sunt numere reale, astfel încât $\sqrt{4x^2+4x+5} \le 3-\sqrt{y^2-4y+5}$, atunci valoarea lui $x \times y$ este:

   A. 0 **B.** 1 **C.** – 1 **D.** Alt răspuns **5p**

2. Dacă $-1 \le y < 2$, atunci $x = \frac{2y-3}{5}$ se află în intervalul:

   A. [-1;0) **B.** [-0,2;1) **C.** [-1;0,2) **D.** Alt răspuns **5p**

3. Fie $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ puncte distincte, astfel încât oricare 4 dintre ele sunt necoplanare. Numărul maxim al planelor determinate de aceste puncte este:

   A. 120 **B.** 720 **C.** 240 **D.** Alt răspuns **5p**

4. Dacă $x - \frac{1}{x} = 3$, iar x este număr real nenul, atunci $x^3 - \frac{1}{x^3}$ este egal cu:

   A. 36 **B.** 27 **C.** 45 **D.** Alt răspuns **5p**

5. Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile de lungime 8 cm. Dacă M, N sunt mijloacele muchiilor CV și BC, atunci măsura unghiului dintre dreptele MN și VA este egală cu:

   A. 45^0 **B.** 60^0 **C.** 30^0 **D.** Alt răspuns **5p**

6. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile $AB = 8$ dm, $BC = 4$ dm și $AA' = 5$ dm. Știind că o furnică parcurge distanța de la punctul A la punctul C' pe drumul cel mai scurt atunci lungimea drumului este:

   A. $\sqrt{105}$ dm **B.** 17 dm **C.** 15 dm **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

1. Determinați numerele naturale nenule x, y, z știind că $\frac{2^{x+y}-3}{2^x+5} = \frac{2y+1}{3y+1} = \frac{z^2+1}{3z+1}$. **10p** **(GM 2009)**

2. Fie $a, b, c > 0$ numere reale și $a + b + c = 1$. Arătați că

$$\sqrt{3a^2+4ab+b^2} + \sqrt{3b^2+4bc+c^2} + \sqrt{3c^2+4ca+a^2} \le 2\sqrt{2}.$$ **20p** **(GM 2017)**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie ABCD un tetraedru regulat, DM perpendiculară pe BC, M € BC. Dacă aria triunghiului AMD este egală cu $9\sqrt{2}\,cm^2$, aflați:

a) lungimea muchiei tetraedrului. **10p**

b) distanța de la centrul O al bazei (BCD) la planul (ABC). **10p**

c) măsura unghiului format de dreptele BC și PN, unde P este mijlocul lui (OD), iar N este un punct oarecare pe AD. **10p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic”
24 noiembrie 2018
Barem de corectare
Clasa a VIII-a, Varianta 3

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
C	C	A	A	B	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

1. $\frac{2y+1}{3y+1} < 1 \Rightarrow \frac{z^2+1}{3z+1} < 1 \Rightarrow z \in \{1;2\}$ **4p**
   Dacă $z = 1 \Rightarrow y = -1 \notin N$ **2p**
   Dacă $z = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$ **4p**

2. $\sqrt{3a^2+4ab+b^2} = \sqrt{(2a+b)^2-a^2} = \sqrt{(a+b)(3a+b)}$ și analog celelalte **7p**
   Notăm cu S suma inițială
   $S \le 2\sqrt{2} \Rightarrow S\sqrt{2} \le 4$ **3p**
   $m_g \le m_a \Rightarrow \sqrt{(2a+2b)(3a+b)} \le \frac{5a+3b}{2}$ și analog celelalte **7p**
   $\Rightarrow S\sqrt{2} \le \frac{8(a+b+c)}{2} \Rightarrow S\sqrt{2} \le 4$ **3p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte

Fie l = lungimea laturii tetraedrului

a). $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp MD$ **5p**
   $A_{AMD} = \frac{AO \cdot MD}{2} \Rightarrow \frac{l^2\sqrt{2}}{4} = 9\sqrt{2} \Rightarrow l = 6$ cm **5p**

b). Fie $OT \perp AM$ **2p**
   $\left.\begin{array}{l} BC \perp AM;\ BC \perp MD \\ AM, MD \subset (AMD) \\ AM \cap MD = \{M\} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp OT$ **5p**
   d(O; (ABC)) = OT **1p**
   $OT = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm **2p**

c). $BC \perp (AMD);\ PN \subset (AMD)$ **5p**
   $BC \perp PN \Rightarrow m(\sphericalangle(BC, PN)) = 90^0$ **5p**

Oficiu 10 puncte