Caleidoscop matematic _____ _____

Nume _____

Prenume _____

Școala _____

Profesor _____

Concursul județean „Caleidoscop matematic"

18.11.2017

Clasa a III-a

Varianta 1

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Încercuiește varianta corectă.**

1. Sfertul lui 16 este egal cu jumătatea numărului **a**. Cât este triplul lui **a**? **5p**

A. 8 **B.** 24 **C.** 16 **D.** 4

2. Mă gândesc la un număr pe care îl micșorez cu 263, apoi cu 114 și obțin cel mai mic număr impar de 3 cifre distincte. La ce număr m-am gândit? **5p**

A. 480 **B.** 487 **C.** 489 **D.** 478

3. Două caiete, o carte și un atlas costă 57 de lei. Câți lei costă un caiet, dacă un atlas costă 28 de lei, ceea ce înseamnă că e cu 11 de lei mai scump decât cartea. **5p**

A. 12 lei **B.** 6 lei **C.** 18 lei **D.** 9 lei

4. La un concurs de creație, copiii s-au grupat câte 6. În fiecare grupă sunt câte 2 fete. Câți băieți sunt, dacă numărul total al fetelor este 12? **5p**

A. 24 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 6

5. La intrarea la teatru, copiii s-au așezat în șir indian. Sorin observă că în fața lui sunt atâția copii cât produsul numerelor 9 și 4, iar în spatele lui, cât suma numărului 24 cu pătrimea sa. La intrarea în teatru erau…copii. **5p**

A. 36 **B.** 30 **C.** 67 **D.** 66

6. La o florărie s-au primit de dimineață 50 de crini albi, roșii și galbeni. Câți crini roșii s-au adus, știind că la 3 crini albi s-au primit 5 crini roșii și 2 crini galbeni? **5p**

A. 24 **B.** 15 **C.** 25 **D.** 30

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă!**

Într-un săculeț sunt 4 bile pe care sunt scrise numerele: 2, 5, 7, 1

a) Scrie toate numerele pare de patru cifre diferite, pe care le poti forma cu cifrele scrise pe bilele din săculeț;

b) Află diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr de patru cifre diferite ce se pot scrie cu cifrele de pe bilele din săculeț;

c) Află suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr par de patru cifre diferite, ce se pot scrie cu aceste cifre;

d) Află suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr impar de trei cifre diferite ce pot fi scrise cu cifrele de pe bilele din săculet;

e) Care este suma maximă pe care o poți obține prin extragerea a trei bile diferite din săculeț?

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă!**

a) Petru vrea să-și cumpere un dicționar, dar are doar 75 de lei și constată că nu-i ajung. Primește de la mama 28 de lei, iar de la tata cu 6 lei mai mult. După achiziționarea dicționarului, rămâne cu 36 de lei. Cât a costat acesta?

b) Din suma rămasă, Petru cumpără un caiet și o carte. Caietul costă o pătrime din suma rămasă, iar cartea costă o treime, tot din suma rămasă. Restul de bani îi împarte în mod egal celor trei verișori ai săi.

Câți lei primește fiecare verișor?

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18.10.2017
Barem de corectare
Clasa a III-a
Varianta 1

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
B	A	B	A	C	C

Subiectul al II-lea – 30 puncte

a)	1572, 1752, 5712, 5172, 7152, 7512	6x1p = 6p
b)	7521- 1257=6264	2p nr. cel mare 2p nr. cel mic 2p scăderea
c)	7512+1572= 9084	2p nr. cel mare 2p nr. cel mic 2p adunarea
d)	125+751=876	2p nr. cel mare 2p nr. cel mic 2p adunarea
e)	7+5+2=14	6p

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a)	28 + 6 = 34 (lei primește de la tata)	4p
	34 + 28 = 62 (lei primește de la părinți)	4p
	62 – 36 = 26 (lei utilizează pentru dicționar)	4p
	75 + 26 = 101 (lei costă dicționarul)	3p
b)	36 : 4=9 (lei caietul)	3p
	36 : 3=12 (lei cartea)	3p
	9+12=21 (carte + caiet)	3p
	36 – 21=15 lei îi donează	3p
	15 : 3 = 5 lei primește fiecare verișor	3p

NOTĂ: Orice altă variantă corectă de rezolvare se punctează corespunzător.

Oficiu: 10 puncte

Caleidoscop matematic _____ _____

Nume _____

Prenume _____

Școala _____

Profesor _____

Concursul județean „Caleidoscop matematic"

18.11.2017

Clasa a IV-a

Varianta 1

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Încercuiește varianta corectă.**

1. Suma a două numere este 26, iar diferența lor este 6. Suma cifrelor celor două numere este: **5p**

A. 10 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 7

2. În parc există o alee de 20 m. De o parte și de alta a aleii sunt plantați arbuști din 5 în 5 m. Câți arbuști sunt? **5p**

A. 10 **B.** 12 **C.** 14 **D.** 8

3. Cu o pătrime din banii pe care îi are, Rareș cumpără o carte de poezii, cu două treimi din rest achiziționează un atlas geografic, iar ultimii 24 de lei îi pune în pușculiță. Ce sumă a avut Rareș? **5p**

A. 48 **B.** 96 **C.** 72 **D.** 24

4. Fie 4 numere consecutive. Știind că suma dintre cel mai mic și cel mai mare este 23, suma primilor doi termeni este: **5p**

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

5. La un concurs s-au înscris 136 elevi. În ziua concursului 8 fete nu s-au prezentat, dar au venit 12 băieți. Acum numărul fetelor este egal cu cel al băieților. Câte fete s-au înscris la concurs? **5p**

A. 70 **B.** 87 **C.** 58 **D.**78

6. Raisa colorează un număr de jucării. Ea constată că mai are de colorat cu una mai mult decât jumătate din câte avea înainte. Câte avea înainte, știind că acum i-au mai rămas de colorat 74 de jucării? **5p**

A. 148 de jucării **B.** 184 de jucării **C.** 150 de jucării **D.** 146 de jucării

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

a) Produsul a șapte numere este 7. Care este suma numerelor?

b) La triplul numărului 6 adaugă sfertul sumei numerelor 19 și 17.

c) Dublul treimii unui număr este 16. Care este jumătatea numărului?

d) Dacă a + 2 x b = 38, iar b + c = 25, atunci a + 3 x b + c = ?

e) Suma dintre un număr, îndoitul său și jumătatea sa este 42. Care este numărul?

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă**

a) Fie **a** și **b** două numere consecutive. Suma dintre aceste numere și vecinii lor măriți fiecare cu 17 este 245. Află cele două numere.

b) Pentru petrecere se cumpără 27 de ornamente. Dacă ar fi cu 2 mai multe steluțe, cu 2 mai puține globuri, de două ori mai multe baloane și de două ori mai puține lampioane, ar fi același număr de ornamente. Câte ornamente sunt din fiecare?

Concursul județean „Caleidoscop matematic”
18.11.2017
Barem de corectare
Clasa a IV-a
Varianta 1

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
C	A	B	B	D	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

a)	1x1x1x1x1x1x7=7; 1+1+1+1+1+1+7=13	2 x 3p = 6p
b)	6 x 3 + (19 + 17) : 4 = 27	4 x 1,5p = 6p
c)	a : 3 x 2 = 16, a = 16 : 2 x 3, a =24, a : 2 = 12	3 x 2p = 6p
d)	a + 2 x b + b + c = 38 + 25, a + 3 x b + c = 63	2 x 3p = 6p
e)	a + a x 2+ a : 2 = 42, a : 2= 42 : 7, a : 2 = 6, a = 12	3 x 2p = 6p

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a)	3 x a + 17 x 2 + 3 x b + 17 x 2 = 245, 3 x a + 3 x b = 177	5p
	a + b = 177 : 3, a + b = 59	5p
	a = (59 – 1): 2, a = 29	2,5p
	b = 29 + 1, b = 30	2,5p
b)	(27 + 2 – 2) : 9 = 3(baloane)	6p
	3 x 2 – 2 = 4 (steluțe)	3p
	3 x 2 + 2 = 8 (globuri)	3p
	3 x 2 x 2 =12 (lampioane)	3p

NOTĂ: Orice altă variantă corectă de rezolvare se punctează corespunzător.

Oficiu- 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Clasa a V-a
Varianta 1

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Dacă $a + b = 24$ și $b + c = 38$, atunci numărul x din egalitatea $a \cdot x + 5 \cdot b \cdot x + 4 + 4 \cdot c \cdot x = 180$ este: **5p**
   A. 12 **B.** 1 **C.** 4 **D.** Alt răspuns
2. Într-un grup de câini și găini, numărul picioarelor este cu 14 mai mare decât dublul numărului de capete. Numărul de câini este egal cu: **5p**
   A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** Alt răspuns
3. Dacă $x = 4 \cdot y + 5$ și $y = 6 \cdot z + 4$, atunci restul împărțirii lui x la 12 este: **5p**
   A. 9 **B.** 7 **C.** 10 **D.** Alt răspuns
4. Suma dintre câtul și restul împărțirii numărului $\overline{ababab}$ la $\overline{ab}$ este: **5p**
   A. 1010 **B.** 101 **C.** 10101 **D.** Alt răspuns
5. Suma numerelor naturale a și b, pentru care $a \cdot b + 2 \cdot a + b = 129$ este egală cu: **5p**
   A. 129 **B.** 192 **C.** 29 **D.** Alt răspuns
6. Suma numerelor naturale a, b, c care îndeplinesc egalitatea:
   $4 \cdot (2^{2a} \cdot 5^{a} + \overline{bb}) = 1999 - 3 \cdot 2^{c}$ este: **5p**
   A. 3 **B.** 2 **C.** 10 **D.** Alt răspuns

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie șirul de numere naturale: 2, 7, 12, 17, ...

a). Aflați termenul de pe locul 30. **10p**
b). Calculați suma primilor 30 de termeni. **10p**
c). Verificați dacă numărul 2017 este termen în șir și dacă da, aflați pe ce loc se află în șir. **10p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

a). Scrieți numărul 760 ca sumă de puteri cu baza 3. **10p**
b). Aflați ultimele 3 cifre ale numărului $2001^{2016^{2017}}$. **10p**
c). Comparați numerele $a = 2^{2003}$ și $b = 81^{1+2+3+\cdots+24}$. **10p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Barem de corectare
Clasa a V-a
Varianta 1

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
B	C	A	C	A	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

a). Determină $a_n = 5 \cdot n - 3$ — 5p
Calculează $a_{30} = 5 \cdot 30 - 3 = 147$ — 5p
b). $S = (5 \cdot 0 + 2) + (5 \cdot 1 + 2) + (5 \cdot 2 + 2) + ... + (5 \cdot 29 + 2)$ — 3p
$S = 5 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 29) + 30 \cdot 2$ — 3p
$S = 5 \cdot 29 \cdot 30 : 2 + 60$ — 2p
$S = 2235$ — 2p
c). $a_n = 5 \cdot n - 3 = 2017$ — 5p
$n = 404$, deci este al 404-lea termen în șir — 5p

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a). Scriem 760 în bază 3: $760 = 1001011_{(3)}$ — 5p
Scriem numărul în baza 10: $1001011_{(3)} = 3^6 + 3^3 + 3^1 + 3^0$ — 5p
b). Notăm $a = 2016^{2017}$ — 2p
$2001^a = (2000 + 1)^a =$ — 2p
$= (\overline{...000} + 1)^a =$ — 2p
$= \overline{...000} + 1 = \overline{...001}$ — 2p
Ultimele 3 cifre sunt $\overline{001}$ — 2p
c). $a = 2^{2003} = 2^3 \cdot 2^{2000} = 8 \cdot (2^{10})^{200} = 8 \cdot 1024^{200}$ — 4p
$b = (3^4)^{300} = 3^{1200} = (3^6)^{200} = 729^{200}$ — 4p
Concluzie $a > b$ — 2p

Oficiu 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Clasa a VI-a
Varianta 1

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Fiind date $\frac{a_1}{b_1} = 1; \frac{a_2}{b_2} = 2; \dots; \frac{a_n}{b_n} = n$, unde $n, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in N^*$, atunci numărul $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+2\cdot b_2+\dots+n\cdot b_n}$ este egal cu:
   A. 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** Alt răspuns **5p**
2. După o reducere de 20%, un obiect costă 325 lei. Procentul cu care trebuie mărit pentru a aduce obiectul la prețul inițial este:
   A. 20% **B.** 25% **C.** 15% **D.** Alt răspuns **5p**
3. Fie A, B, C puncte coliniare în această ordine și AB = 2^{x+1} cm, BC = 2^x cm, $x \in N^*$
   Dacă AC = 24 cm, atunci numărul x este egal cu:
   A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** Alt răspuns **5p**
4. Suma a două numere naturale nenule este 2001 și cel mai mare divizor comun al lor este 87. Numărul soluțiilor care verifică cerințele date este egal cu:
   A. 2 **B.** 10 **C.** 22 **D.** Alt răspuns **5p**
5. Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine, astfel încât AB = a cm, BC = b cm, CD = c cm și $2 \cdot a + 3 \cdot b + 4 \cdot c = 30$, unde a, b, c nr. naturale prime. Atunci lungimea [AD] este egală cu:
   A. 9 **B.** 10 **C.** 12 **D.** Alt răspuns **5p**
6. Restul împărțirii unui număr natural n la 4 și la 6 este 3, respectiv 4. Atunci restul împărțirii numărului n la 12 este egal cu:
   A. 7 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

1. Determinați numărul natural $A = \overline{49a4b}$, știind că $A \vdots 28$ și $(\overline{ab} + 1) \vdots 9$. **15p**
2. Demonstrați că oricare ar fi numerele naturale $\overline{aaaa}$ și $\overline{bbbb}$ în bază 10, are loc inegalitatea: **15p**

$$\frac{\overline{aa}^2 + a \cdot \overline{aaa}}{4 \cdot \overline{aaaa}} < \frac{\overline{bbbb}}{\left(\overline{bb}\right)^2 + b \cdot \overline{bbb}}$$

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie două puncte M, P $\in$ [AB], M $\neq$ P astfel încât AM · AP = BM · BP.

a). Arătați că $\frac{AM}{PB} + \frac{AP}{MB} = 2$. **15p**

b). Arătați că [AB] și [MP] au același mijloc. **15p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Barem de corectare
Clasa a VI-a, Varianta 1

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
C	B	A	C	A	B

Subiectul al II-lea – 30 puncte

1). $28 \mid A \Rightarrow 4 \mid A$ și $7 \mid A$ — 2p

$4 \mid A \Rightarrow 4 \mid \overline{4b} \Rightarrow b \in \{0; 4; 8\}$ — 2p

$b = 0 \Rightarrow 9 \mid (\overline{a0} + 1) \Rightarrow a = 8 \Rightarrow A = 49840$ și $7 \mid A$ — 3p

$b = 4 \Rightarrow 9 \mid (\overline{a4} + 1) \Rightarrow a = 4 \Rightarrow A = 49444$ și $7 \nmid A$ — 3p

$b = 8 \Rightarrow 9 \mid (\overline{a8} + 1) \Rightarrow a \in \{0; 9\} \Rightarrow A = 49048$ și $7 \nmid A$ — 3p

$A = 49948$ și $7 \nmid A$ — 2p

Concluzie $A = 49840$

2). $\frac{a^2 \cdot (11^2+111)}{4a \cdot 1111} < \frac{1111 \cdot b}{b^2(11^2+111)}$ — 2p

Simplificând obținem $\frac{a \cdot (11^2+111)}{4 \cdot 1111} < \frac{1111}{b(11^2+111)}$ — 2p

$a \cdot b \cdot (11^2 + 111)^2 < 4 \cdot 1111^2$ — 4p

$a \cdot b < \left(\frac{2 \cdot 1111}{11^2+111}\right)^2 = \left(\frac{2222}{232}\right)^2 < \left(\frac{2320}{232}\right)^2 = 10^2$ — 4p

$a \cdot b < 100$ (A) — 3p

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a). $AM \cdot AP = BM \cdot BP \Rightarrow \frac{AM}{BP} = \frac{BM}{AP} = k$ — 3p

$AM = BP \cdot k$; $BM = AP \cdot k$ — 3p

$AM + BM = AB \Rightarrow BP \cdot k + AP \cdot k = AB$ — 3p

$k \cdot (BP + AP) = AB \Rightarrow k \cdot AB = AB \Rightarrow k = 1$ — 3p

$\frac{AM}{PB} + \frac{AP}{BM} = 1 + 1 = 2$ — 5p

b). $\frac{AM}{PB} = 1 \Rightarrow AM = PB = x$ — 5p

Dacă Q = mijlocul lui [MP] $\Rightarrow AQ = x + MQ$

$QB = QP + x$ și $MQ = MP$

$\Rightarrow AQ = QB$, deci Q = mijlocul lui [AB] — 5p

Oficiu 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Clasa a VII-a
Varianta 1

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Fie $a, b, c, d, e \in Q - \{-1\}$ și $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{e+1}=\frac{5}{2}$. Atunci suma $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\frac{e}{e+1}$ este egală cu:
   A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 5 **D.** Alt răspuns **5p**
2. Un patrulater convex are lungimile a trei laturi egale cu 4 cm, 5 cm, respectiv 6 cm. Atunci lungimea celei de a patra laturi poate fi egală cu:
   A. 18 cm **B.** 16 cm **C.** 15 cm **D.** Alt răspuns **5p**
3. Dacă $x = -3{,}75$, atunci numărul $n = x + (-x) + |x| + \{x\} + \{x\}$ este egal cu:
   A. 1 **B.** -3,75 **C.** 0 **D.** Alt răspuns **5p**
4. Fie numărul $A = \frac{\overline{ab}+23}{\overline{ab}-6}$. Dacă numărul A este natural, atunci suma $a + b$ poate fi egală cu:
   A. 8 **B.** 7 **C.** 2 **D.** Alt răspuns **5p**
5. Fie ABCD un romb cu [BD] ≡ [AB], M ∈ AC, astfel încât A ∈ (MC) și [AM] ≡ [AB]. Atunci măsura unghiului BMD este egală cu:
   A. 150^0 **B.** 60^0 **C.** 30^0 **D.** Alt răspuns **5p**
6. Comparând numerele a și b, unde $a = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$ și $b=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{100}$ obținem:
   A. $a = b$ **B.** $a < b$ **C.** $a > b$ **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie mulțimile $A = \left\{x \in Q \middle| x = \frac{a+1}{a+3}, a \in N\right\}$ și $B = \left\{y \in Q \middle| y = \frac{b+5}{2\cdot b+3}, b \in N\right\}$.

a). Dacă M = A ∩ B, atunci aflați cardinalul mulțimii M. **15p**

b). Determinați numărul elementelor supraunitare din mulțimea B. **15p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie un triunghi ABC, cu măsura unghiului A de 90^0, măsura unghiului C egală cu 30^0 și M mijlocul [BC], N ∈ (AC), astfel încât $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$, iar P este mijlocul [BN].

a). Arătați că APMN este romb. **10p**

b). Arătați că P este ortocentrul triunghiului ABM. **10p**

c). Dacă AC = 6 cm, calculați PO, unde {O} = AM ∩ BN. **10p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Barem de corectare
Clasa a VII-a
Varianta 1

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
A	D	C	A	C	A

Subiectul al II-lea – 30 puncte

a). $A \cap B \Rightarrow \frac{a+1}{a+3} = \frac{b+5}{2b+3}$ — 2p
$(a+1)\cdot(2b+3) = (a+3)\cdot(b+5)$ — 2p
$2ab + 3a + 2b + 3 = ab + 5a + 3b + 15$ — 2p
$ab - 2a - b = 12$ — 2p
$ab - 2a - b + 2 = 14$ — 2p
$a(b-2) - (b-2) = 14$ — 1p
$(a-1)\cdot(b-2) = 14$ — 1p
$a-1;\ b-2 \in D_{14},\ iar\ a, b \subset N \Rightarrow card(M) = 4$ — 3p

b). $2b + 3 < b + 5$ — 8p
$b < 2$, $b \in N$, deci sunt 2 elemente — 7p

Subiectul al III-lea – 30 puncte

a). [PM] = linie mijlocie ⇒ PM || NC și PM = $\frac{1}{2}$NC — 3p
PM || AN; PM = AN ⇒ APMN = paralelogram (1) — 4p
BN ⊥ AM (înălțime în triunghi echilateral MAB) (2)
Din (1) și (2) ⇒ APMN = romb — 3p

b). PM || AC ⇒ PM ⊥ AB ⇒ [PM] = înălțime (3) — 4p
(2) ⇒ [BP] = înălțime (4) — 4p
Din (3) și (4) ⇒ P = ortocentru — 2p

c). AC = 6 cm ⇒ AN = AP = 2 cm — 3p
MAC = triunghi isoscel ⇒ $m(\angle OAN) = 30^0 \Rightarrow m(\angle PAN) = 60^0 \Rightarrow$ — 2p
PAN = triunghi echilateral — 2p
⇒ PN = 2 cm ⇒ PO = 1 cm — 3p

Oficiu 10 puncte

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Clasa a VIII-a
Varianta 1

Notă: **Toate subiectele sunt obligatorii.**
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs varianta corectă.**

1. Fie mulțimea $A = \left\{x \in R \middle| x = \frac{a^2+a+8}{2\cdot a+1},\ a \in Z\right\}$. Atunci card $(A \cap Z)$ este egal cu:
   A. 3 **B.** 4 **C.** 2017 **D.** Alt răspuns **5p**
2. Mulțimea formată din numerele reale a astfel încât $(-5; 3) \cap [a; 7]$ să conțină 3 numere întregi este:
   A. $(0; 1]$ **B.** $\{0\}$ **C.** $(-1; 0]$ **D.** Alt răspuns **5p**
3. Numărul dreptelor care trec prin 5 puncte, oricare 4 puncte fiind necoplanare, este:
   A. 5 **B.** 10 **C.** 7 **D.** Alt răspuns **5p**
4. Fie numărul $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$. Atunci $[x]$ este egală cu:
   A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** Alt răspuns **5p**
5. Fie cubul ABCDA'B'C'D'. Atunci măsura unghiului format de dreptele AB' și BC' este egală cu:
   A. 60^0 **B.** 45^0 **C.** 90^0 **D.** Alt răspuns **5p**
6. Fie ABCD o piramidă regulată dreaptă și M, N, P mijlocele [AB], [AC], respectiv [AD]. Dacă aria triunghiului MNP este egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2, atunci BC este egal cu:
   A. $9\sqrt{3}$ cm **B.** 9 cm **C.** 18 cm **D.** Alt răspuns **5p**

Subiectul al II-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

Fie numărul $a = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$, $n \in N^*$.

a). Calculați $[a]$ și $\{a\}$. **15p**

b). Determinați numărul natural n astfel încât $\{a\} = \frac{2016}{2017}$. **15p**

Subiectul al III-lea – 30 puncte **Scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.**

1. Fie cubul ABCDA'B'C'D', cu $AB = 2\cdot a$ cm; cu a număr real strict pozitiv. Calculați sinusul unghiului format de dreptele AE și DF, unde E și F sunt mijloacele lui [BB'], respective [AA']. **15p**
2. Fie A, B, C, D puncte necoplanare astfel încât AD = AB + AC, semidreapta [AE este bisectoarea unghiului BAC, $E \in (BC)$, semidreapta [AF este bisectoarea unghiului CAD, $F \in (CD)$; $M \in (AD)$, și $N \in (CD)$ astfel încât AM = AB; DN = CF. Demonstrați că $(AEF) \parallel (BMN)$. **15p**

Concursul județean „Caleidoscop matematic"
18 noiembrie 2017
Barem de corectare
Clasa a VIII-a
Varianta 1

Subiectul I – 30 puncte

1	2	3	4	5	6
B	C	B	A	A	D

Subiectul al II-lea – 30 puncte

a). $a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}$ 3p

$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1\cdot 2}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}$ 3p

$a = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 3p

$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow [a] = 0$ 3p

$\{a\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 3p

b). $\{a\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2016}{2017}$ 5p

$\sqrt{n+1} = 2017$ 5p

$n = 2017^2 - 1$ 5p

Subiectul al III-lea – 30 puncte

1). CE || DF ⇒ măsura unghiului (AE; DF) = măsura unghiului (AE; CE) = măsura unghiului (AEC) 3p

Dacă AB = 2a ⇒ AE = EC = $a\sqrt{5}$ 3p

AC = $2a\sqrt{2}$ 3p

$\cos(E) = \frac{1}{5}$ 3p

$\sin(E) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ 2p

2). Fie AM = AB = x; MD = AC = y; CF = DN = a 3p

$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{y}$ (1) 3p

$\frac{FC}{FD} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow \frac{FC}{FD-FC} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{FC}{FN} = \frac{y}{x}$ (2)

Din (1) și (2) $\xRightarrow{R.T.Th.}$ $EF \,||\, BN$ 3p

BN ⊂ (BNM), deci EF || (BNM) (3) 2p

Analog MN || AF și MN ⊂ (BNM), deci AF || (BNM) (4) 2p

Din (3) și (4) și AF, EF ⊂ (AEF) ⇒ (AEF) || (BNM)

Oficiu 10 puncte